

## A képességek fejlődésének logisztikus modellje

*A képességek fejlődése és fejlesztése az iskolai oktatás legfontosabb kérdései közé tartozik. A pedagógiai kontextusban gyakran használt fejlődés-fejlesztés szókapcsolat pontosan érzékelteti, hogy a problémának két oldala van.*

A fejlődés meghatározott pszichológiai törvényszerűségek szerint megy végbe, amelyek megismerése alapvető jelentőségű a fejlődés optimális kereteinek kialakításához. Az oktatás problémáival foglalkozó kutatók figyelme – érthető okokból – elsősorban a fejlesztés lehetőségeire és feladataira, a képességek szerkezetére, a fejlesztés tartalmi oldalára irányul (ld. pl. Csapó, 1999; Nagy, 2000). Ugyanakkor – ez a kérdés másik oldala – a képességfejlődés pszichológiai törvényeinek szempontjai, amelyek szintén fontosak az iskolai oktatás tervezésében, nem mindig játszanak a jelentőségüknek megfelelő szerepet. A képességek fejlődésének három sajátosságát érdemes kiemelni. Az oktatási rendszer mai mechanizmusai különböző mértékben veszik ezeket figyelembe.

Ma már közismert, hogy a készségek, képességek fejlődése időben elhúzódó folyamat. Egy-egy készség, képesség kialakulásához legalább hónapokra, de inkább évekre van szükség, néhány általános képesség fejlődési folyamata pedig akár több évtizedet is átfoghat. A fejlődési folyamatok időigényét, a képességfejlődés folyamat-jellegét az oktatás egyre jobban figyelembe veszi. Egy-egy képesség fejlesztésével (például olvasás, számolási készségek) valóban hosszabb (bár gyakran nem kellően hosszú) ideig foglalkozik az iskola.

A gyerekek között jelentős fejlettségbeli különbségek vannak. Ez azt jelenti, hogy az azonos évfolyamra járó gyerekek között érettségüket, az egyes képességeik fejlettségét tekintve jelentős különbségek vannak. Az azonos életkorú tanulók közötti fejlettségbeli különbségek – a különbségeket az adott lemaradás behozásához szükséges időre átszámolva – akár több évet is elérhetnek. Ezekkel a különbségekkel az iskola többnyire nem tud mit kezdeni. Bár a különbségek ismertek, részletesen dokumentáltak, alig működnek olyan mechanizmusok, amelyek a kezelésükre szolgálnak vagy a kiegyenlítődést segítik.

A gyerekek közötti különbségek sokfélék lehetnek. Ez a felismerés nem eléggé vált a pedagógiai gondolkodás részévé. Egyrészt az egyes pszichológiai tulajdonságok tekintetében a gyerekek közötti különbségek más-más módon alakulhatnak, másrészt a fejlődés természetéből, különböző tempójából következően hosszabb időszakot átfogó fejlődési folyamat során a különbségek mértéke is változhat.

Közelebb visz bennünket az iskolai oktatás néhány krónikus problémájának megértéséhez, ha a fejlődés további mennyiségi sajátosságait megismerjük. Régi pedagógiai tapasztalat, hogy egy-egy készség vagy képesség fejlődése lassan indul, aztán felgyorsul, majd egy lassuló fázissal közelít a végső állapothoz. Ebben a tanulmányban a képességek fejlődésének mennyiségi természetét vesszük közelebről szemügyre, pontosabban leírva és megmagyarázva az említett tapasztalatot. Bemutatjuk a növekedést leíró matematikai modellt, majd különböző vizsgálatok adatai alapján meghatározzuk a fejlődést leíró függvényeket. Végül megfogalmazzuk a modelltől levonható pedagógiai következtetéseket.

### A fejlődés jellemzésére szolgáló fogalmak

A képesség, ismeret, fejlődés, tanulás terminusok az iskolai oktatással kapcsolatban leggyakrabban használt fogalmak. Általában a képességek fejlődéséről és az ismeretek tanulásáról beszélünk, azonban a későbbi elemzésekhez nem lesz szükség a pontos fogalmi megkülönböztetésükre. Ezért a továbbiakban nem teszünk különbséget fejlődés és tanulás között, mindkettő a tudás gyarapodását reprezentálja. Ez a közös szóhasználat természetesen nem azt jelenti, hogy a tudás változása egységes jelenség lenne. (Csapó, 1992)

A kognitív fejlődésnek, miként a pszichikus fejlődés más dimenzióinak is, vizsgálhatjuk a mennyiségi és a minőségi természetét egyaránt. Vannak olyan elméletek, amelyek a kognitív fejlődést elsősorban minőségi változások sorozatának tekintik. Az ilyen elméletek a változásokat különböző állapotok közötti ugrásszerű átmenetekként fogják fel. A talán legnagyobb hatású elmélet, *Piaget* kognitív fejlődéselmélete így jellemzi az értelmi fejlődést. Más modellek a fejlődés kvantitatív vonatkozásaira helyezik a hangsúlyt, és a fejlődést mennyiségi növekedésként írják le. Ez utóbbi megközelítésre példaként a pszichometriai módszereket, az értelmi képességek tekintetében az intelligencia tesztekkel történő mérését említhetjük.

Az itt következő elemzésekben csak a fejlődés mennyiségi oldalával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy bár a fejlődés alapvető természetét tekintve többnyire kvalitatív jellegű lehet, az ennek eredményeként bekövetkező teljesítményváltozások már mennyiségi jellegűek és mérhetőek.

Az értelmi fejlődés mindig az egyének változása, közvetlenül intra-individuális összehasonlításokkal, tehát egy egyén különböző időpontokban megfigyelt állapotainak összevetésével tanulmányozható. Az ilyen megfigyelések a vizsgálatba bevont egyének tanulmányozott életszakaszában teszik szükségessé a változások nyomon követését, azaz longitudinális adatgyűjtést igényelnek. A longitudinális vizsgálat, bár megbízható eredményeket szolgáltat, számos módszertani nehézséggel jár és többnyire rendkívül költséges. Ezért a fejlődést gyakran az inter-individuális összehasonlítások, azaz különböző korú minták egy adott időpontban való megvizsgálása révén tanulmányozzák.

A keresztmetszeti vizsgálatok adatai a fejlődésre megfelelő becslést adnak, ha viszonylag rövid időt fognak át és az alatt az idő alatt nem következik be lényeges változás a képességek fejlődését befolyásoló környezet tekintetében. Az említett nehézségek miatt a pedagógiai kontextusban túlnyomórészt keresztmetszeti felméréseket végeztek. A következő elemzésekhez szintén azonos időpontban különböző életkorú tanulókkal felvett adatokat használunk fel.

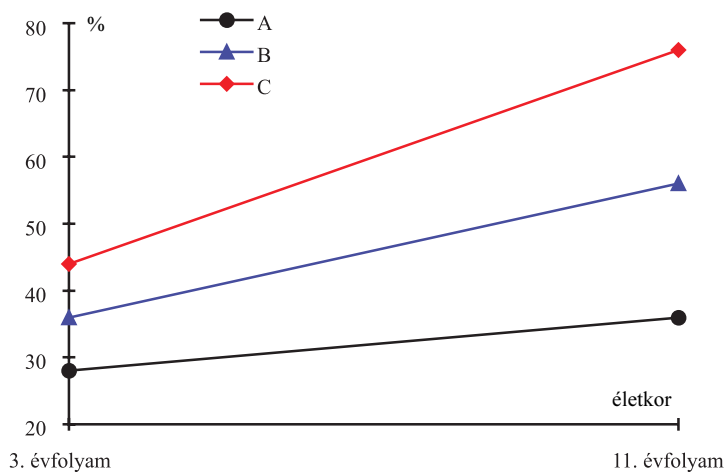
Mivel ma már a közoktatás a népesség egészét és nem csak egy kis hányadát fogadja magába, az iskolába járó populáció megismerése a pedagógia feladatává vált. Az egyes korosztályon belüli különbségeket jól kifejezi egy-egy felmérés eredményének a szóródása, amelynek a statisztikai mértéke a szórás.

Az egymást követő korosztályok között is vannak különbségek, amelyeket a fejlődés természetes eredményének tartunk. Továbbá, ha az egyes korosztályokon belüli eltéréseket az idő függvényében vizsgáljuk, tipikusan azt tapasztaljuk, hogy ezek az eltérések növekednek. A pedagógiai irodalomban ezt a jelenséget gyakran a teljesítmények polarizációjának nevezik.

### A lineáris változáson alapuló szemlélet korlátai

A képességek fejlődéséről alkotott közkeletű vélekedés szerint a fejlődés lineáris növekedés, a képesség fejlettsége arányos az életkorral, vagy legalábbis egy adott időszak alatt bekövetkezett fejlődés mértéke arányos az eltelt idővel. Ezen a szemléletmódon alapult az intelligenciahányados eredeti (mentális életkor osztva a naptári életkorral) defini-

ciója. Eszerint az egyének közötti különbségek az eltérő (de egy adott tanuló esetében állandó) fejlődési tempóból fakadnak. Ha a fejlődés lineáris, akkor a teljesítményt, például valamilyen képesség-teszt eredményét az életkor függvényében ábrázolva az 1. ábrán látható egyenesekhez hasonló képet kapunk.

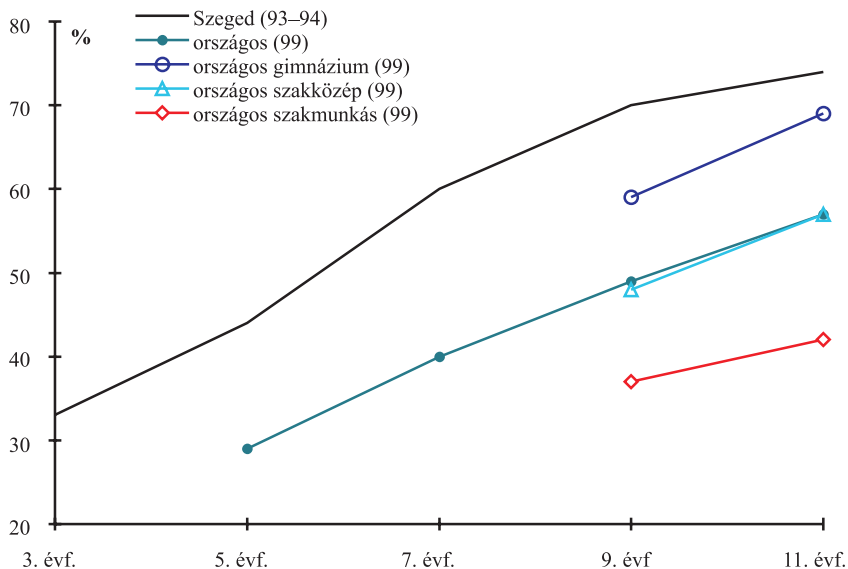


1. ábra. A képességek lineáris fejlődésének szemléletmódja

Az ábrán látható egyeneseket például három tanuló feltételezett fejlődési pályájának tekinthetjük. Ilyen ábrákkal gyakran találkozhatunk, hiszen a keresztmetszeti vizsgálatok eredményeit ábrázolva hasonló grafikonok keletkeznek. Két különböző időpontban ugyanazzal a teszttel felmérve a tanulókat a teljesítmények növekedését tapasztaljuk. További adatok hiányában a két mérési pontot egyenessel kötjük össze.

Egymáshoz közeli időpontok esetében még nem követünk el nagy hibát, ha két adatot egyenessel kötünk össze. Olyan széles intervallumot vizsgálva azonban, amely az adott képesség csaknem teljes fejlődési szakaszát átfogja, a változás már nem lineáris. Például, ha felmérjük az induktív gondolkodás fejlettségét az általános iskola harmadik és a középiskola harmadik osztályában, akkor az 1. ábra szerinti feltételezés már biztosan nem igaz. A képességfejlődés valódi folyamatainak szemléltetésére a 2. ábrán különböző felmérésekből származó adatokat mutatunk be.

Az adatok két különböző vizsgálatból származnak. Szegeden 1993/94-ben egy induktív gondolkodás teszttel végeztünk felmérést. Ugyanennek a tesztnek a rövidített (és nehezebbé tett) változatával 1999-ben országos reprezentatív mintán megismételtük a felmérést. (Csapó, 1994, 2001) A szegedi adatfelvétel a harmadiktól a tizenegyedik évfolyamig, az országos az ötödiktől a tizenegyedik évfolyamig terjedő életkori tartományt fogta át. Az ábrán az egymás melletti mérési pontokat egyenessel kötöttük össze. (Hasonló eredményeket kaptunk 1995-ben a 7. és 11. évfolyamon végzett felmérés során, ld. Csapó, 1998.) Mindamellet több mérési pont is egy egyenesre vagy ahhoz közel eshet, így akár még négy-hat évet átfogó felmérés alapján is a fejlődés lineáris jellegére utaló adatokat kaphatunk. Az 1999-ben elvégzett felmérés adatait ábrázoló görbén találunk ilyen szakaszokat. Ugyanakkor a szegedi vizsgálat adatait ábrázolva már megmutatkozik a fejlődési folyamatokra általában inkább jellemző, elnyúlt S alakú logisztikus görbe.



2. ábra. Az induktív gondolkodás fejlődése

A 2. ábrán a középiskolások eredményeit bemutatjuk iskolatípus szerinti bontásban is, tehát külön egyenként jellemezzük a szakmunkás, a szakközépiskolás és a gimnáziumi tanulók fejlődését. A szakmai publikációk sokaságában találunk ilyen jellegű ábrázolást, tudnunk kell azonban, hogy ezek az egyenesek egy hosszabb fejlődési folyamatból csak egy kis szakaszt mutatnak be, és a fejlődés ütemét nem általánosíthatjuk más életkori szakaszokra. Ez egyben jelzi azt is, hogy a fejlettségbeli különbségek az idő előrehaladtával – egy-egy rész minta esetében – valóban növekednek. Az ábra azonban jelzi a lineáris szemlélet korlátait és a képességek fejlődését jobban leíró modell használatának szükségességét is.

### A fejlődés logisztikus modellje

A természetben megfigyelhető fejlődési folyamatok többnyire nem lineáris jellegűek. Az egyik legáltalánosabb jelenség az exponenciális változás. Ez akkor áll elő, ha egy mennyiség időegység alatti megváltozása arányos magának az adott mennyiségnek az aktuális értékével. Állandó kamatláb mellett exponenciálisan növekszik a bankban elhelyezett pénz összege. Exponenciális ütemben szaporodik egy populáció, ha az egymást követő generációkban a szülők ugyanolyan arányban hoznak létre utódokat mindaddig, amíg semmi nem korlátozza a növekedést. Sok más növekedési folyamat korai szakasza is pontosan leírható az exponenciális változás feltételezésével.

Az exponenciális növekedés a

$$dF/dt = r \cdot F$$

differenciálegyenlettel jellemezhető, ahol  $F$  a fejlettség egy adott időpontban,  $dF$  annak megváltozása a  $dt$  idő alatt, az  $r$  pedig a fejlődésre jellemző konstans.

Az egyenlet egyik megoldását a következő exponenciális függvény adja:

$$F(t) = F_0 \cdot e^{rt}$$

ahol  $F(t)$  a fejlettség az idő függvényében,  $F_0$  a fejlettség induló szintje,  $e$  pedig a természetes logaritmus alapja.

A növekedés azonban bizonyos idő eltelte után mindig valamilyen korlátba ütközik. A talán legtöbbet tanulmányozott biológiai jelenség, azaz a populáció növekedése esetén a környezet tűrőképessége, konkrétabban a rendelkezésre álló táplálékforrás szab gátat a további növekedésnek. A korlát a fejlődés kezdeti szakaszában még nem érezteti hatását, ekkor a fejlődés üteme hasonlít az exponenciális változáshoz. Azonban a korlát hatása annál erősebb lesz, minél jobban megközelíti azt a fejlettség aktuális szintje. A korlát (például az erőforrások kimerülése) hatását szintén egy (az előzővel ellentétes irányban ható) exponenciális függvénnyel vehetjük figyelembe. A két hatás (az exponenciális növekedés, illetve a korlát szerepének exponenciálisan növekedő súlya) eredőjét együttesen a logisztikus függvény írja le.

A növekedés említett tulajdonságát figyelembe véve a fejlődés változási sebességének meghatározásakor, megfelelő helyettesítéssel, határátmenettel, valamint a logaritmus azonosságai alkalmazásával a következő formulához jutunk:

$$F(t) = K \cdot F_0 \cdot e^{rt} / [F_0 \cdot (e^{rt} - 1) + K]$$

ahol

$F(t)$ : a fejlettség  $t$  idő elteltével;

$F_0$ : a kezdeti fejlettség (a  $t = 0$  időpontban);

$K$ : a fejlődés korlátja;

$r$ : a növekedést meghatározó konstans, növekedési ráta.

A logisztikus függvény természetét a populáció növekedésével (ld. Molnár, 1999) kapcsolatban először részletesen Verhulst (1) vizsgálta. (Hoppensteadt, 1982) Megfigyelhető e modell érvényessége a logisztikus görbével jól jellemezhető biológiai érés és az értelmi fejlődés modellezése során is. (Yeagers, Shonkwiller és Herold, 1996)

Mielőtt a konkrét elemzésekre rátérnénk, érdemes megfontolni, milyen szakmai tapasztalatok és feltevések alapján javasoljuk a logisztikus görbét a képességek fejlődésének modellezésére, azaz miért lehet egy matematikai összefüggést – amely sok különböző tartalmú növekedési folyamatot leír – a képességek fejlettségi szintjének jellemzésére is használni. Lényegében elegendő annak megmutatása, miért indul a növekedés exponenciális ütemű változással, azaz milyen folyamatokat tételezhetünk fel, amelyek révén a képességek időegységre eső változása arányos az aktuális fejlettség szintjével.

Ilyen mechanizmusokat könnyű találni. Ha egy készség vagy képesség a megfelelő tevékenység gyakorlása (például valamilyen műveletvégzés) révén fejlődik, és a fejlettebb képességgel ugyanabból a tevékenységből többet tudunk egy időegység alatt végezni, akkor a több gyakorlás nagyobb növekedéshez vezet. Így tehát a gyorsuló ütemű változást megmagyarázhatjuk, a korlát létezését és hatását más növekedési folyamatokhoz hasonlóan értelmezhetjük.

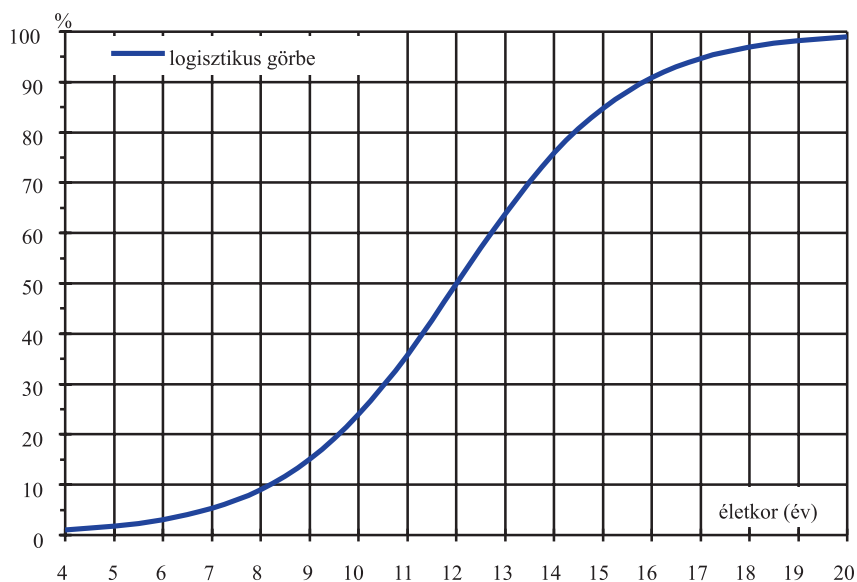
A képességek fejlődése szempontjából tehát mindkét exponenciális változás alapjául szolgáló feltevés megalapozható. Egyrészt a képesség újabb képesség megszerzésének eszköze, a fejlettség egy adott szintje meghatározza, hogy mennyit lehet a képességet egy adott idő alatt gyakorolni, így az első szakasz exponenciális változása értelmezhető. A képességek kivitelezésének szellemi és biológiai alapjai pedig nyilvánvaló korlátot jelentenek, aminek a hatása a képesség fejlődésével egyre érzékelhetőbbé válik. Itt természetesen csak az alapelvekre kereshetünk magyarázatot, a mechanizmusok konkrét értelmezésére csak egyes készségek és képességek fejlődésével kapcsolatban lenne mód.

A későbbi modellezés megkönnyítése érdekében vizsgáljuk meg alaposabban a logisztikus görbék tulajdonságait, paramétereit. (3. ábra) A logisztikus görbe egy expo-

nenciálisan gyorsuló, majd lassuló trend szuperpozíciójaként adódik. A kezdeti, látszólag lassan induló növekedés üteme felgyorsul, majd a korláthoz közeledve ismét lelassul. Azt a pontot, ahol a gyorsuló fejlődés lassulóba vált, inflexiós pontnak nevezzük.

A 3. ábrán látható görbe paraméterei:  $K = 100$ ,  $F_0 = 0,1$ ,  $r = 0,575$ . Így a fejlődésre olyan értékeket kapunk, amelyek megfelelnek egy széles életkori sávban elhúzódozó fejlődési folyamatnak. Ha az időt években mérjük, akkor a 4 évhez az 1 százalék, a 20 évhez a 99 százalék fejlettségi érték tartozik. Az inflexiós pont 12 év körül van, ekkor a fejlettség 50 százalékos.

Nézzük meg most egy konkrét példán, valódi mérés eredményeit felhasználva, milyen pontosan egyeznek a mért és a logisztikus függvény alapján kiszámított adatok. A 2. ábrán már bemutatott 1993–94-es szegedi felmérés eredményeihez (Csapó, 1994) illesztettünk logisztikus görbét. Az illesztéshez több programot is felhasználhatunk (a MS Word grafikonszerkesztőjének is van ilyen funkciója, de az általános célú táblázatkezelő vagy statisztikai programokkal, például az Excel vagy az SPSS segítségével is meg lehet oldani a feladatot). Ezek általában a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzák, azaz minimalizálják a mért adatok és a függvényből számított adatok közötti különbségek négyzetének összegét.



3. ábra. A logisztikus fejlődési görbe

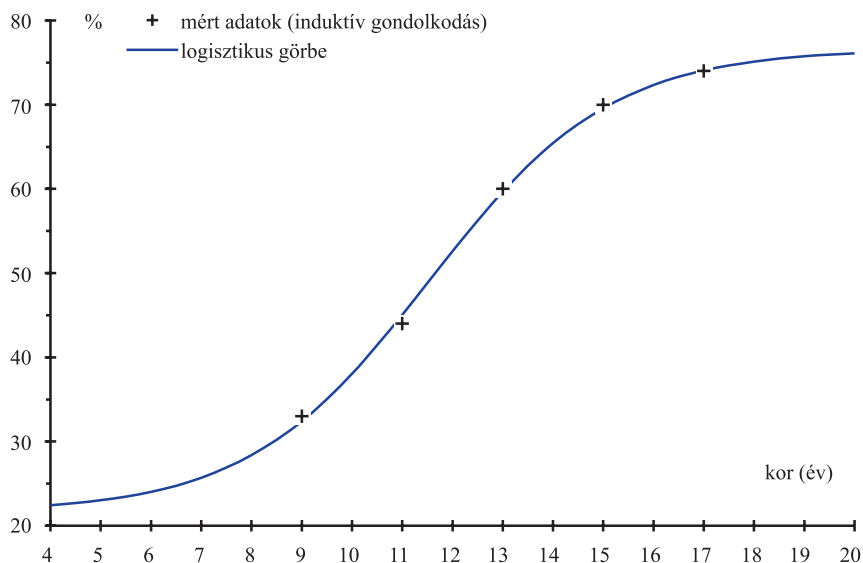
Az itt következő elemzésekben az eredeti logisztikus függvényből indultunk ki és a konkrét paraméterek meghatározásához „kézi finomhangolással” további tapasztalatokat, a tesztek természetére vonatkozó megfigyeléseket is figyelembe vettünk. A mért adatokat és a hozzájuk illesztett logisztikus görbét a 4. ábrán szemléltetjük.

A becsléshez itt a

$$F(t) = K \cdot F_0 \cdot e^{rt} / [F_0 \cdot (e^{rt} - 1) + K] + a$$

függvényt használtuk, ami a logisztikus függvény eredeti formájától csak a konstans hozzáadásában különbözik. Ezzel a méréshez használt teszt sajátosságait vettük figyelembe. (Például a feleletválasztásos feladatokat bizonyos valószínűséggel pusztán találgatással is

meg lehet oldani, azaz a képesség „0 fejlettségi szintjéhez” 0-nál nagyobb pontszám tartozik.)



4. ábra. Logisztikus görbe illesztése mért adatokhoz

A legjobb becslést az

$$a = 21,6, \quad K = 55,0, \quad F_0 = 0,091, \quad r = 0,555$$

paraméterekkel értük el.

Az egyenlettel számított értékek pontosságának illusztrálására az 1. táblázatban megadjuk a felmért korosztályok átlagát és a logisztikus függvény alapján számított értékeket. Amint a táblázatból kitűnik, az eltérés minden esetben kisebb, mint 1 százalékpont.

	életkor (év)				
	9	11	13	15	17
mért	32,95	44,53	60,28	70,20	74,10
számított	32,41	45,04	59,69	69,58	74,07

1. táblázat. Az induktív gondolkodás fejlettségének mért és számított értékei

### A képességek fejlődésének modellezése – további görbék illesztése felmérések adataihoz

A Szegedi Tudományegyetemen (illetve a korábbi József Attila Tudományegyetemen) működő kutatócsoport számos olyan felmérést végzett, amelyik a képességek fejlődési folyamatait tárta fel. A felvett adatok többnyire egy-egy képesség fejlődésének teljes intervallumát átfogják. A fejlődést ábrázoló grafikonokon így általában jól felismerhető a logisztikus görbe, vagy legalábbis annak egy-egy jellegzetes szakasza.

A következőkben két felmérés adataihoz illesztünk logisztikus görbét. Az egyik a számlálás készségének kialakulása. Ez az adatsor alkalmas annak illusztrálására, hogy

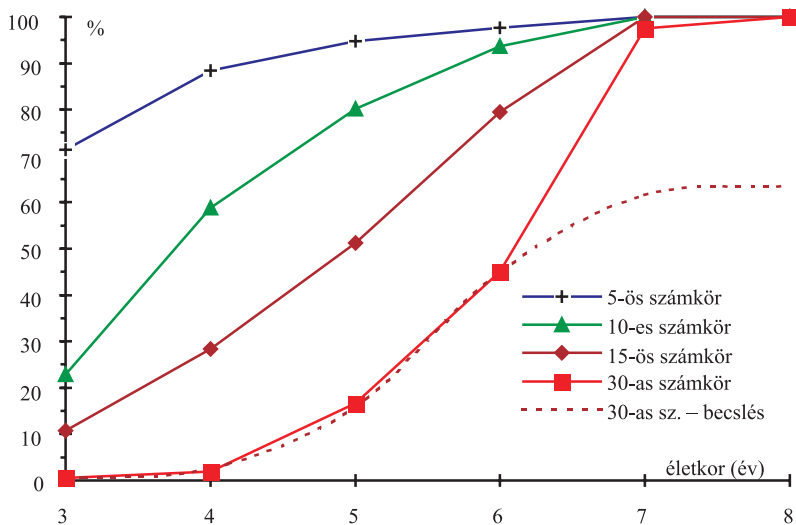


egy viszonylag rövid időt átfogó fejlődés is logisztikus jellegű, továbbá tanulmányozhatjuk azt is, hogy egy logisztikus görbe különböző szakaszairól állnak rendelkezésünkre adatok. A másik felmérés az arány fogalmának fejlődését mutatja be. Az arányosság jó példa lehet arra, hogy bár egyszerű és alapvető jelentőségű matematikai összefüggésről van szó, elsajátítása időben elhúzódó folyamat. A tanulók egy része csak a középiskolában jut el teljes megértésig.

Nézzük tehát a számlálás fejlődését. (Nagy, 1980) Az iskolába lépéshez közeli életkorban (3-tól 8 évesek körében) elvégzett felmérés azt vizsgálta, hogy meddig tudnak a tanulók elszámolni.

Az 5. ábrán azoknak az arányát mutatjuk be különböző életkorban, akik 5-ig, 10-ig, 15-ig, illetve 30-ig tudnak elszámolni. Ez a példa azt illusztrálja, hogy még egy ilyen egyszerű készség is, mint a számlálás, a népesség egésze esetében több év alatt fejlődik ki. Abban az életkori szakaszban, amelyet a felmérés átfog, az 5-ig való számlálás készsége már nagyrészt kialakult, a másik három esetben viszont csaknem a teljes fejlődési folyamatot jelzik a mért adatok. Egy gyerek természetesen gyorsabban megtanulhatja a számlálást, de a különböző tempóban fejlődő gyerekek együttesen az ábrán látható ütemben változnak.

A mért adatokhoz az előzőekhez hasonlóan csak a 30-as számkörben való számlálás fejlődésére illesztünk logisztikus görbét. Az ábráról látható az, hogy a hét évesek teljesítménye kiugróan magas, azaz az iskolába lépve gyorsabban megtanulnak számolni a gyerekek, mint ahogyan azt az addigi fejlődési ütem alapján várnánk. Ezért itt a görbe illesztéséhez csak a 3–6 évesek teljesítményét vettük figyelembe. Ha csak ezekre a pontokra illesztjük a logisztikus görbét, az alacsonyabb szintet jelez a későbbi életkorokra, mint amit a felmérés adatai mutatnak. (A görbe paraméterei:  $r = 2,05$ ,  $F_0 = 0,00075$ ,  $K = 64$ .) Az iskola hatása tehát itt abban mutatkozik meg, hogy a gyerekek átlagos fejlődésének pályája letér a megjósolt logisztikus görbéről.



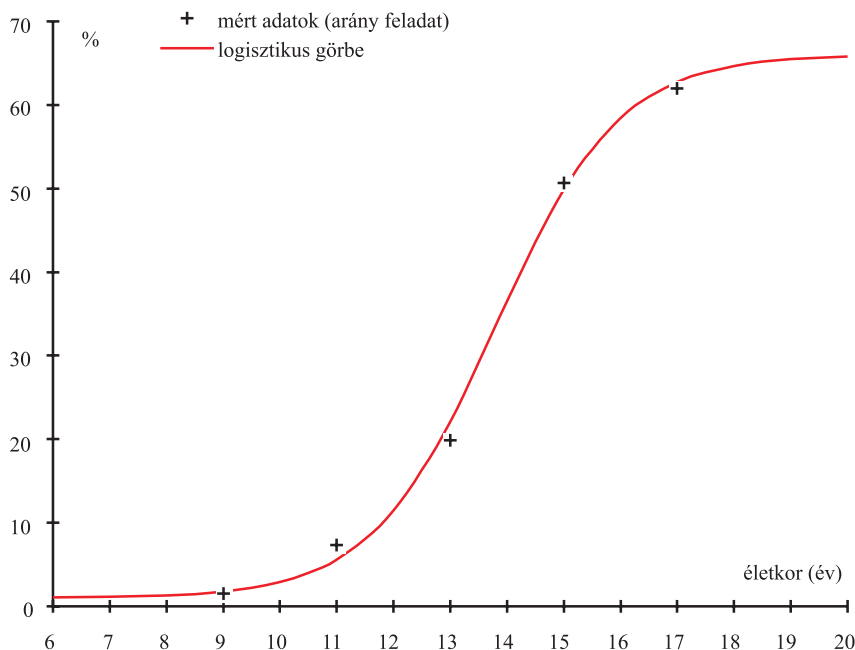
5. ábra. A számlálás fejlődése

Egy további példaként az induktív gondolkodással gyakran párhuzamba állított, az analógiás gondolkodás elemi formájaként is felfogható arány-feladat (2) megoldásában nyújtott teljesítményeket elemezzük. A feladat megoldásához csak egy egyszerű arány felismerése szükséges, ugyanakkor a véletlen találat esélye a feladat nyitottsága miatt mi-



nimális. (Csapó, 1994) Az eredmények viszonylag szabályos fejlődési folyamatot rajzolnak ki. (6. ábra) A harmadik osztályosok közel nulla szintjéről a tizenegyedik osztály végére 62 százalékra javul az eredmény. A kilencedik és a tizedik osztály között kis ütembeli törés mutatkozik.

Elsősorban azoknak a készségeknek a fejlődésében tapasztalható szabálytalanságokat lehet az iskola hatásával magyarázni, amelyeket az oktatás rövidebb idő alatt is hatékonyan befolyásol. Ez a számlálás esetében valóban megfigyelhető. Az olyan általános képességek fejlődésére viszont, mint az induktív gondolkodás, nem egy konkrét tantárgy vagy a tanítás egy adott szakasza, hanem inkább az iskolázás egésze hat. Elgondolkodtató ebből a szempontból az, amit az arányosság megítéléséhez szükséges gondolkodás fejlődésével kapcsolatban láttunk. A fejlődés túlságosan elhúzódo és szabályos, azaz úgy tűnik, mintha az iskola alig lenne rá hatással.



6. ábra. Az arányosság megértésének fejlődése

Korábbi felméréseink során számos más képesség fejlődési folyamatait is feltérképeztük. (Csapó, 1983; Nagy, 1980, 1987; Vidákovich, 1987; Vidákovich és Csapó, 1998) Érdemes ezek paramétereit is meghatározni, így ugyanis pontosabb képet kaphatunk a képességek fejlődéséről, és ha a fejlődés szabályos logisztikus változást mutat, akkor a részletes adatokat néhány paraméter megadásával helyettesíthetjük. Ebben a tanulmányban azonban további képességek fejlődésével nem foglalkozunk.

Természetesen a bemutatott adatokat és összefüggéseket nem tekinthetjük úgy, hogy azokkal kielégítő módon lehetne az értelmi fejlődés folyamatainak logisztikus jellegét bizonyítani. Nem csupán azért, mert ahhoz további, szélesebb körből gyűjtött adatokra lenne szükség: további adatok valószínűleg hasonló képet mutatnának. Bármennyi további, a logisztikus tendenciával összhangban álló adatot vonultatnánk is fel, egy ilyen induktív megközelítéssel a fejlődés logisztikus jellegét szigorú értelemben bizonyítani nem lehetne. A bemutatott összefüggések azonban kellő alapot szolgáltatnak arra, hogy a

logisztikus fejlődést mint elmélyült elemzésre érdemes hipotézist fogalmazzuk meg, és a gyakorlati megfigyelések, tapasztalatok értelmezéséhez kellő súllyal számításba vegyük.

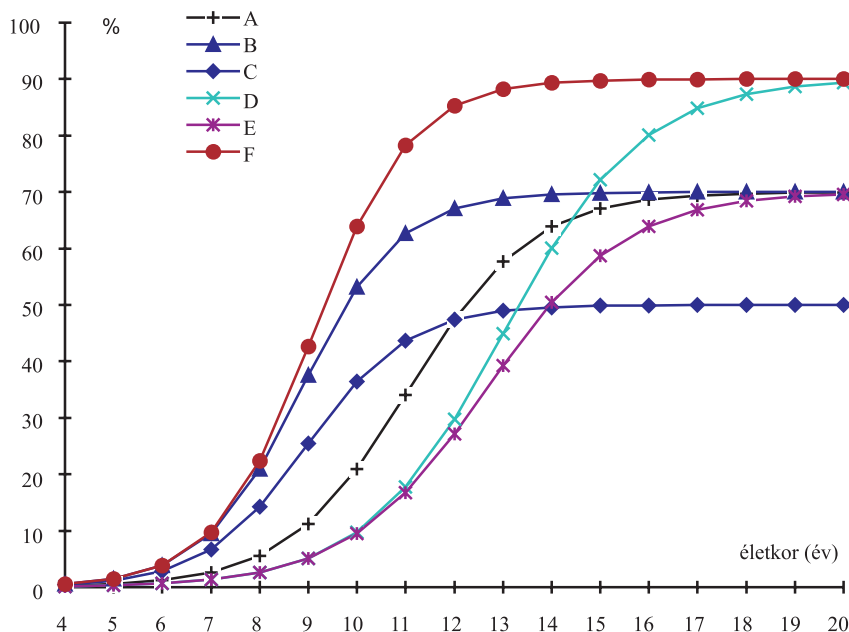
### A fejlődés egyéni különbségeinek értelmezése a logisztikus görbék transzformációival

A logisztikus függvény paramétereinek módosításával a görbe lényeges tulajdonságait tudjuk változtatni, azaz így lehet a görbét transzformálni (nyújtani, zsugorítani, eltolni). Azokat a különbségeket, amelyeket a gyerekek között megfigyelhetünk, ezeknek a paramétereknek a változataival írhatjuk le. A logisztikus görbe paraméterei meghatározzák a fejlődés tempóját – mégpedig az egyes életkorokban eltérő ütemet – és az elérhető maximumot. Más-más életkorra eshet az a szakasz, amikor a leggyorsabb a fejlődés, amit nagyjából az inflexió pont helyével jellemezhetünk.

Nézzünk néhány példát arra, milyen fejlődési görbét kapunk, ha az egyes paramétereket változtatjuk. Hat különböző esetet vizsgálunk meg. Az  $F_0$  értéket egységesen 0,01-nek választottuk, a logisztikus függvények többi paraméterét a 2. táblázat foglalja össze.

görbe	$K$ (korlát)	paraméter	$r$ (fejlődési ráta)
A	70		0,80
B	70		1,00
C	50		0,95
D	90		0,70
E	70		0,70
F	90		1,00

2. táblázat. A logisztikus görbék paraméterei



7. ábra. A fejlődés logisztikus görbéi

Az egyes fejlődési folyamatokat a 7. ábrán szemléltetjük. (Az itt bemutatott elemzés lényegében egy korábban javasolt modell részletesebb kifejtése, ld. Csapó, 1992. 124.)

A 7. ábra görbéi egy-egy jellemző fejlődési pályát írnak le. Látható, mennyire sokféle különbség lehet az egyes gyerekek között. Elérhetnek magasabb vagy alacsonyabb végső fejlettséget, és ezt a szintet elérhetik korábban vagy később. Az azonban első ránézésre feltűnik, hogy a végső fejlettségi szintet egyetlen korai állapot alapján nehéz lenne megbecsülni.

Az A jelű tanuló pályája egy átlagos, közepes tempójú és közepes szintet elérő fejlettségnek felel meg. Az ilyen és ehhez hasonló fejlődési folyamat jellemző a legtöbb gyerekre, és az átlagtól jobban eltérő folyamat kevesebb tanulónál figyelhető meg.

A B görbe egy olyan „csodagyerek” pályáját illusztrálja, akiből nem lesz „csodafelnőtt”. A fejlődés korán indul, a fejlettséget egy ideig a társak feletti teljesítmények jellemzik, de aztán végül csak egy átlagos szintet ér el. Ugyanilyen szintet ér el az a tanuló is, akit az E görbével jellemezhetünk, csak az ő esetében később gyorsul fel a fejlődés. Bár a végső szint megegyezik, az A, B és E tanulók iskolai pályafutásuk teljes szakaszán egymástól nagyon különböző fejlettséget mutatnak.

A C görbe az A-hoz képest egy kezdetben gyorsabb ütemű, de alacsonyabb szinten megálló fejlődést ábrázol. Ez a görbe az A-ból lényegében úgy származtatható, hogy az A-t mindkét tengely (az x és az y) irányában „összenyomjuk”. Ez a különbségek legtipikusabb formája, és egyben azt is jelenti, hogy a gyerekek a fejlődés során helyet cserélnek, a lassabban induló megelőzi a kezdetben gyorsabban fejlődő társát.

A D tanuló a tipikus „későn érő gyermek”, akinek teljesítménye sokáig kortársai teljesítménye alatt marad, csak idősebb korában, már a fejlődés lassuló szakaszában éri utol társait. Viszont ekkor nem csak utoléri, hanem el is hagyja őket és a mindvégig élen haladó F gyerek fejlődési szintjét közelíti meg.

Az F tanuló fejlődésgörbéje azt a valóságban elég ritka jelenséget reprezentálja, amikor a fejlődési pályája mindig a társak felett halad és végül azoknál magasabb szintet is ér el. Ez az az eset, amikor a kiemelkedő képességet korán fel lehet ismerni, illetve a kiemelkedő tehetségként számon tartott tanuló később beváltja a hozzá fűzött reményeket.

A 7. ábra egyik legszembevetőbb jellegzetessége az, hogy az egyes görbék átmetszik egymást, ami annak felel meg, hogy a tanulók a fejlettség tekintetében megelőzik egymást. Ha tehát különböző időpontokban fejlettségük szerint sorba rendeznénk őket, a sorrend időről időre másként alakulna.

### Néhány következtetés

A felvázolt modellnek az a legfőbb tanulsága, hogy a gyerekek között nagyon sokféle különbség lehet. Még ha csak a képességek fejlődésének mennyiségi jellemzőivel foglalkozunk is, nagyon változatos kép tárul elénk. A gyerekeket egyetlen dimenzióban végérvényesen elrendező szemléletmód tehát nemcsak leegyszerűsíti a szóban forgó jelenséget, hanem kifejezetten téves. A képességek fejlődésének matematikai természetéből következően iskolai pályafutásuk során a gyerekek a fejlettségi ragsorban akár többször is helyet cserélhetnek. Nem lehet tehát a fejlődés egy korai szakaszában tapasztalt szint alapján az elérhető végső szintet megjósolni.

Messze vezetne annak elemzése, hogy a fejlődés két paramétere, a K (korlát) és az r (fejlődési ráta) honnan származik, milyen mértékben biológiailag programozott (öröklött) és mennyiben határozza meg a környezet. Feltételezhetjük, hogy valamilyen arányban mindkét tényező szerepet játszik, de nem tudjuk pontosan, milyen ez az arány. Ahhoz azonban, hogy a modell pedagógiai szempontból lényeges következtetését megvonjuk, erre nincs is szükség. Ha feltételezzük, hogy egy adott gyerekre a fejlődés során állandóan ugyanolyan jellegű környezeti hatások hatnak, akkor a fejlődés nagyjából a vá-

zolt modell szerint megy végbe, ha pedig a környezeti feltételek lényegesen megváltoznak (például változik a családi környezet vagy az iskola), akkor a fejlődés pályája is megváltozik.

Van azonban néhány olyan jelenség, amelyet elég részletesen ismerünk ahhoz, hogy a hatásaival néhány következtetés erejéig foglalkozzunk. Az egyik ilyen az önmagát beteljesítő jóslat, vagy ennek pozitív formája, a Pygmalion-effektus. Ez az effektus az iskolában arra a jelenségre utal, hogy ha egy tanulót tehetségesnek tart a környezete – mindezekelőtt a tanárai – és ezt a direkt kommunikáció és az indirekt metakommunikáció eszközeivel tudatosítja benne, akkor az a tanuló beteljesíti az elvárások formájában megfogalmazódó jóslatot. A kiemelt figyelem és a magasabb elvárások a motiváció olyan többletét jelentik, amelyek felfele térítik el az egyébként várható fejlődési pályáról. Ez azoknál a „korán érő” gyerekeknél jelenthet előnyt, akik a fejlődés korai szakaszában megelőzik társaikat.

Hasonló, csak fordított előjelű hatást gyakorol a környezet – a jóslat önmagát beteljesítő erejénél fogva – azokra, akiknek a fejlődése lassabban indul. Ez sok olyan gyereket visszavethet, akiben egyébként ígéretes lehetőségek rejtőznek. A „lassan érő típus” kifejezést a pedagógusok gyakran tréfásan vagy eufemisztikusan használják a gyengén teljesítők megjelölésére, pedig valószínűleg sok olyan gyerek van, akiről soha nem derülhet ki, hogy ha az átlagnál lassabban is, de „beérne”.

Egy másik ismert jelenség az, hogy ha a gyerekeket különböző fejlesztő hatású iskolákban tanítjuk, akkor közöttük a különbségek az egyébként várhatónál nagyobb mértékűek lesznek. Ez a helyzet a mi iskolarendszerünkben tipikusan az általános iskola-középiszkola átmenetnél fordul elő. Kimutatható, hogy például a szakközépiskolákba és a gimnáziumokba járó gyerekek között a tizenegyedik évfolyamon már sokkal nagyobb a különbség, mint ami az azonos fejlesztő hatású oktatás esetén várható lenne. (Csapó, 1998) Az erre utaló adatok pozitív üzenete az, hogy a jobb minőségű iskolai oktatásnak mérhető fejlesztő hatása van. A jelenség negatív oldala az, hogy ebben a jobb minőségű oktatásban nem mindenki részesülhet.

## Jegyzet

(1) Belga matematikus, a logisztikus egyenletet (*Verhulst*-egyenlet) ő használta először populációdinamikai tanulmányokhoz. 1838-ban megalkotott modelljének érdeme, hogy már a környezet tűrőképességét is figyelembe veszi.

(2) A feladathoz tartozik egy ábra is, melyen két üveghenger, egy keskenyebb magas és egy alacsony szélesebb látható. A szöveg a következő: *Egy szélesebb üveghengerbe vizet öntünk a 4. vonalig (A henger). Ez a víz a 6. vonalig ér, ha átöntjük egy keskenyebb hengerbe (B henger). Most a széles hengerbe a 6. jelig öntünk vizet. Hányadik jelig fog érni a víz, ha átöntjük a B hengerbe?*

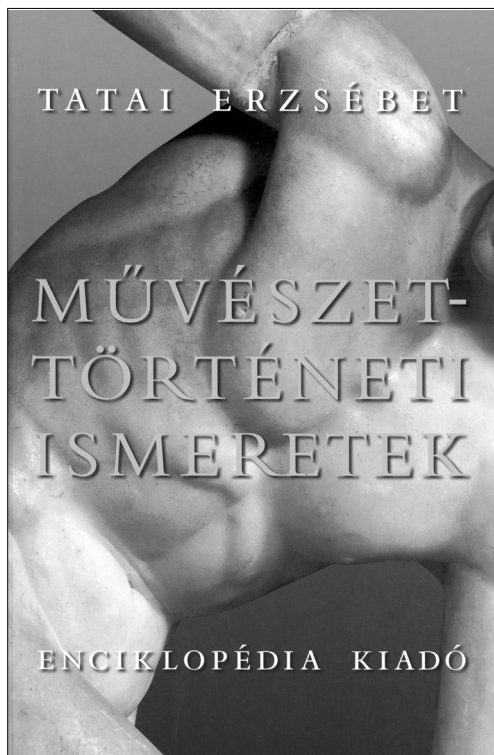
## Irodalom

- Csapó Benő (1983): A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálata 14 éves tanulónál. *Magyar Pedagógia*, 83. 1. 31–50.
- Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő (1994): Az induktív gondolkodás fejlődése. *Magyar Pedagógia*, 94. 1–2. sz. 53–80.
- Csapó Benő (1998): Az új tudás képződésének az eszköze: az induktív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 251–280.
- Csapó Benő (1999): Képességfejlesztés az iskolában – problémák és lehetőségek. *Új Pedagógiai Szemle*, 49. 12. sz. 4–13.
- Csapó Benő (2001): Az induktív gondolkodás fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 3. 373–391.
- Hoppensteadt, F. (1982): *Mathematical methods of population biology*. Cambridge University Press, New York.
- Molnár Gyöngyvér (1999): Számítógépes modellek Magyarország népességének alakulására. *Polygon*, 9. 1. sz.
- Nagy József (1980): *5–6 éves gyermekeink iskolakészültsége*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Molnár Gyöngyvér – Csapó Benő: A képességek fejlődésének logisztikus modellje

- Nagy József (1987): *A rendszerezési képesség kialakulása. Gondolkodási műveletek.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Nagy Lászlóné (2000): A gondolkodási képességek fejlesztésének lehetséges útjai. *Alkalmazott Pszichológia*, 2. 4. sz. 75–88.
- Vidákovich Tibor (1987): A logikai műveleti képességek fejlesztése: feladatok és lehetőségek. *Pedagógiai Szemle*, 37. 10. sz. 1038–1047.
- Vidákovich Tibor – Csapó Benő (1998): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. *Közoktatás-kutatás 1996–1997.* Budapest, 247–273.
- Yeagers, E. K. – Shonkwiller, R. W. – Herold, J. V. (1996): *An Introduction to the Mathematics of Biology.* Birkhauser, Boston.

*A tanulmány korábbi változata „A hat és nyolc osztályos gimnáziumok a magyar oktatási rendszerben” c. kutatási programhoz készült. A bemutatott modellekhez a SZTE-MTA Képességkutató Csoport keretében az OTKA T030555, az FKFP és az OM támogatásával végzett vizsgálatok adatait használtuk fel.*



*Az Enciklopédia Kiadó könyveiből*