

15.

A kombinatív képesség fejlődésének mérése online tesztekkel

Csapó Benő

MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Pásztor Attila

MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport

Bevezetés

A kombinatív képesség, kombinatív gondolkodás az emberi értelem egyik leg-érdekesebb funkciója, amely számos hétköznapi helyzetben, bonyolult problémamegoldásban és tudományos tevékenységben egyaránt szerepet kap. A kombinatív gondolkodásra minden olyan helyzetben szükség van, amikor meghatározott elemekből kell a feltételeknek megfelelő különböző összeállításokat létrehozni, lehetőség szerint minél többet, bizonyos esetekben az összeset. A kombinativitást filozófusok, matematikusok még tudományos eszközökkel való vizsgálata nélkül is sokféle intellektuális tevékenységgel kapcsolatba hozták, meghatározó szerepet tulajdonítottak neki a különböző alkotótevékenységekben, újításokban, felfedezésekben és a fantázia működésében.

A modern pszichológia ugyancsak sokféle kontextusban tanulmányozza a kombinatív gondolkodást, központi szerepe van *Piaget* értelmifejlődés-elméletében, felfedezhető a problémamegoldás bizonyos mechanizmusaiban és a divergens gondolkodásban, kreativitásban is. A kombinatorika a modern matematika egyik leggyorsabban fejlődő ága, alkalmazása sok más diszciplínára kiterjed, ugyanakkor a kombinatorika tanítása hosszú ideig csak a felsőoktatásban és a középiskolában kapott szerepet. A modern matematikatanítás azonban az egyszerű felsorolási feladatokat bevitte az első évfolyamok tanterveibe, és a gondolkodásfejlesztés egyik legfontosabb eszközének tekintti. Változatos összeállítások elkészítése különböző tárgyak, eszközök felhasználásával játékos tevékenységek formájában egyaránt segítheti a fejlődést és erősítheti a motivációt.

A kombinatív képesség kvantitatív vizsgálatának és szisztematikus fejlesztésének is előfeltétele, hogy fejlődésének mérésére megfelelő eszközök álljanak rendelkezésre. A szegedi egyetemen közel négy évtizedre visszanyúló hagyománya van a kombinatív képesség kutatásának, és ezalatt különböző tesztek készültek a kombinatív képesség felmérésére. A kombinatív gondolkodás autentikus felmérése csak a változatos összeállítások létrehozásán keresztül valósítható meg, az eszközökkel készített összeállítások regisztrálása, a papíralapon végzett felsorolások kiértékelése, számítógépen való rögzítése azonban időigényes és költséges feladat. E feltételek miatt a kutatási célokra jól használható tesztek nem kerülhettek át az iskolai gyakorlatba, nem válhattak a pedagógiai munkát támogató eszközzé.

Ugyanazok a körülmények, amelyek korlátozták a papíralapú kombinatív tesztek gyakorlati alkalmazását, egyben ideális feltételeket teremtenek a számítógépes tesztelés számára. Számítógépen könnyen, változatos formában elő lehet állítani kombinatív feladatokat, a tesztet megoldó tanuló a képernyőn mozgatva az egyes objektumokat valódi konstrukciós tevékenységet folytathat. Mindemellett a számítógép bonyolult kiértékelési algoritmust alkalmazva azonnal értékeli a megoldás eredményét is.

Ebben a fejezetben a kombinatív képesség számítógépes felmérése érdekében végzett fejlesztő munka első lépéseit mutatjuk be. Azt kívánjuk szemléltetni, hogy a számítógép alkalmazása a kombinatív gondolkodás felmérése esetében is rendkívüli előnyökkel jár: nem csupán lehetséges az online felmérés, hanem a technológia alkalmazása megoldja azokat a problémákat is, amelyek akadályozták a papíralapú tesztek gyakorlati alkalmazását.

A kombinatív képesség mérésének elméleti háttere

Pedagógiai (pszichológiai) szempontból kombinatív képességen azt az alapvető képességet értjük, amely lehetővé teszi megadott (vagy rendelkezésre álló) elemekből megadott (vagy a kontextusból kikövetkeztethető) feltételeknek megfelelő összeállítások létrehozását, felsorolását. Megnevezésére szinonimaként használjuk a kombinatív gondolkodást, amely közelebb áll az angol combinatorial reasoning terminushoz.

A kombinatív képesség elemei, egyszerűbb műveletei mindenkiben kialakulnak formális oktatás nélkül is, rendszeres gyakorlással azonban a

kombinatív képesség nagymértékben fejleszhető. A kombinatív képesség az összeállítások létrehozására, felsorolására irányul, az ezzel analóg matematikai terület a felsorolási problémákat (enumeration problems) tanulmányozza. A matematikában és annak sok gyakorlati alkalmazásában, továbbá a matematikatanításban is nagyobb szerepet kap a lehetséges kombinációk számának meghatározása (kiszámítási problémák), ez azonban nem tárgya a kombinatív képesség tanulmányozásának.

A kombinatív képesség fejlődését sokféle kontextusban vizsgálták, elsősorban pszichológiai szempontból, másrészt pedig mint az új matematikatanítási koncepció egyik érdekes lehetőségét, továbbá a szerepét a valószínűségi gondolkodás és korrelatív gondolkodás kialakulásában.

A kombinatív gondolkodásnak az értelmi fejlődésben betöltött szerepét legrészletesebben *Jean Piaget* elemezte. *Piaget* modelljében a kombinatív műveletek a kétváltozós logikai műveletek kialakulásában kapnak szerepet, többféle módon is. Egyrészt az egyes elemi kijelentések igazságértékének (igaz, hamis) kombinálásával adódik az összetett ítéletek 2×2 cellából álló igazságtáblázata. Másrészt ennek az igazságtáblázatnak 16-féle kitöltési lehetősége van (mind a négy helyen kétféle érték állhat: $2 \times 2 \times 2 \times 2$), ami definiálja a 16 kétváltozós logikai műveletet. Végül négy elem összes rész-halmazának képzése is előállítja a 16 kétváltozós logikai műveletet, és ez adja azt a hálóstruktúrát is, amely keretbe foglalja a formális gondolkodás kialakulását (*Inhelder és Piaget, 1967, Csapó, 1988*). Kitüntetett szerepüknek megfelelően *Piaget* közvetlenül is vizsgálta a kombinatív műveletek fejlődését. Kísérleteiben a gyerekeknek olyan feladatokat kellett megoldaniuk, amelyekben szükségszerűen különböző összeállításokat kellett létrehozni, például négy szintelen folyadék felhasználásával meg kellett találniuk, miképp lehet bizonyos vegyítésükkel egy adott színreakciót kiváltani.

A kombinatív gondolkodás elemei korán kialakulnak, és viszonylag könnyen lehet olyan feladatokat készíteni, eszközöket létrehozni, szituációkat, játékos helyzeteket teremteni, amelyekben ki lehet váltani a kombinatív gondolkodást. *English* (1991) és *Poddiakov* (2011) is végzett olyan vizsgálatokat, amelyekben már négyéves gyermekek is részt vettek.

Piaget munkái nagy hatást gyakoroltak az új matematikatanítás módszereinek kialakítására (*Dienes, 1973*). Ennek keretében a tanulók először különböző eszközökkel, tárgyakkal végezték el a műveleteket, majd azok belsővé válásával, interiorizációjával alakultak ki az értelem műveleti struktúrái. A logikai és halmazműveletek mellett a kombinatív műveletek is

érdekes gyakorlatok végzésére teremtenek lehetőséget, és mind a matematikatanításhoz kapcsolódóan, mind azon túl számos vizsgálatot inspiráltak (Kishta, 1979; English, 1993; Schröder, Bödeker, Edelstein és Teo, 2000; Lockwood, 2013). A kombinatív gondolkodás vizsgálata és fejlesztése mind nagyobb szerepet kap a középiskola és felsőoktatás szintjén is (DeTemple és Webb, 2014; Maher, Powell és Uptegrove, 2011).

A kombinatív gondolkodás fontos szerepet játszik a természettudományos gondolkodás fejlődésében. A korai szakaszban a kísérletek megtervezésében (Poddiakov, 2011), a változók különböző értékeinek kombinálásában (több ismert Piaget-kísérletben is szükség van erre), később a függő és független változók, az okok és okozatok kapcsolatának elemzésében (Adey és Csapó, 2012). A komplex problémamegoldásban a jelenségek releváns változóinak azonosításában, a változók lehetséges értékkombinációinak szisztematikus vizsgálatában kap szerepet a kombinatív gondolkodás.

A kreativitást, divergens gondolkodást igénylő feladatokban, bizonyos helyzetekben ugyancsak szükség van a sokféle összeállítás elkészítésére, majd azok értékelésére, és közülük a legalkalmasabbaknak a kiválasztására (Simonton, 2010). Ezt a tulajdonságot egyes kreativitásmodellek a varianciafaktorral veszik figyelembe. A kombinatív gondolkodás fejlettsége segítheti a művészi fantázia kibontakozását, a képzőművészeti alkotások variabilitását is (Zombori, 1992). Fishbein és Grosman (1997) azt állapította meg, hogy sok esetben az intuíció is a kombinatív sémákra épül, és így a kombinatív gondolkodás fejlesztését fel lehet használni az intuíció fejlesztésére is.

A kombinatív képesség felmérése papíralapú tesztekkel

Azoknak a kombinatív-képesség-teszteknek a fejlesztése, amelyek a jelenlegi online tesztek előzményeként szolgáltak, az 1970-es évek végén kezdődött a tartalmi keretek kidolgozásával (Csapó, 1979). Ezt követően került sor egy részletes műveletrendszer kidolgozására, amely számításba vette azokat a kombinatív műveleteket, amelyek hétköznapi tevékenységek során felmerülhetnek.

Az így elkészült rendszer nyolc fő műveletet, összesen 37 különböző feladatstruktúrát tartalmazott. Mindegyik művelet feladatstruktúrái a megvalósítható legkisebb elemszámmal kezdődtek, és növekvő bonyolultságú

(elemszámú) feladatokat tartalmaztak addig, amíg áttekinthető mennyiségű változók és értékek voltak a feladatokban. Ezekhez tesztek készültek, mindegyik feladatstruktúrához három különböző (manipulatív, képi és formális) tartalommal, összesen 111 feladattal. Az egyes tartalmakhoz készült 37 feladat megoldásához nagyjából két tanóra volt szükség, így mindegyik tartalom feladatai két-két tesztbe kerültek, azaz a teljes feladatsorból összesen hat, egy-egy tanóra alatt megoldható teszt készült. Ezekkel a tesztekkel két életkorban került sor a felmérésekre. A manipulatív feladatokban a tanulók egyszerű eszközökből (színes pálcikák, lapok) összerakták a feltételeknek megfelelő összeállításokat, a képi feladatokban pedig kis képeken valódi helyzetekhez hasonlító összeállításokat jelöltek be (pl. ruhadarabok kiválasztása különböző öltözetekhez, gyümölcsök elosztása, pénzértékekből sokféle összeg elkészítése). A formális feladatokban betűkből és számokból kellett különböző összeállításokat készíteni, felsorolni. A háromféle tartalom különbözőképpen segíthette az összes lehetőség megtalálását. A manipulatív feladatokban lehetőség volt a tárgyak fizikai mozgatására, az összeállítások átrendezésére, a formális tartalomnál pedig a betűknek, illetve a számoknak a sorrendisége segíthette az összeállítások szisztematikus felsorolását (Csapó, 1983, 1988).

Ezek a tesztek lehetőséget nyújtottak különböző speciális kérések vizsgálatára is. Például a matematikai szempontból egymásnak megfeleltethető, izomorf szerkezetű feladatok megoldásának összehasonlítása megmutatta, hogy a fejlődés különböző szintjein másként jelenik meg a tartalom vagy a szerkezet dominanciája (Csapó, 1985). A felsorolások sorrendje pedig a tanulók gondolkodási stratégiájának lenyomataként érdekes lehetőséget teremtett a kvalitatív adatelemzés számára (Csapó, 1987a).

A kombinatív gondolkodás fiatalabb korban való vizsgálatára további tesztek készültek (Nagy, 2004; Hajdúiné Holló, 2004). Az ezekkel végzett felmérések megmutatták, hogy a kombinatív gondolkodás elemei már az iskola első éveiben vagy még korábban megjelennek.

A kombinatív képesség volt az egyik területe (a rendszerezési és a logikai mellett) a művelési képességek fejlesztésére irányuló kísérletnek. A tartalomba ágyazott fejlesztésre két különböző életkorban került sor, mindegyik esetben két különböző tantárgyban (4. évfolyamon környezetismeret és nyelvtan, hetedik évfolyamon kémia és fizika) készültek el a fejlesztő gyakorlatok. A három képesség közül a kombinatív képesség bizonyult leginkább fejleszhetőnek (Csapó, 1987b, 1990, 1992).

A korábbi felmérés eredményei alapján regresszióelemzés segítségével végzett optimalizálással készült egy rövidített, egy tanóra alatt megoldható teszt. Ez hat feladatstruktúrából állt, mindegyikhez kétféle (képi és formális) tartalmú feladatokkal. Ezzel a 12 feladatot tartalmazó teszttel sor került egy országos reprezentatív mintán végzett felmérésre is (Csapó, 2001). A keresztmetszeti fejlődésvizsgálatban a 3., 5., 7., 9. és 11. évfolyamok vettek részt. Az eredmények szerint ebben az életkori intervallumban a kombinatív képesség fejlődése nem szabályos, logisztikus görbének feleltethető meg, hanem a fejlődésgörbe inkább két egymás utáni logisztikus folyamat tükröz, ami arra utalhat, hogy közben egy strukturális átrendeződés is végbemegy. Az e fejezetben bemutatott, digitalizált mérőeszköz is ennek a tesztváltozatnak a felhasználásával készült el.

A feladatok digitalizálása, az online felmérés tesztje

A papíralapúról a technológiaalapú tesztelésre való áttérésnek sokféle oka lehet. Mindenekelőtt számítógéppel sokkal gyorsabban és hatékonyabban lehet a méréseket elvégezni, általában megoldható az automatikus kiértékelés, és azonnal rendelkezésre állnak az eredmények (Csapó, Ainley, Bennett, Latour és Law, 2012). Ugyanakkor nem minden feladatformátumot lehet számítógépre átültetni, és bizonyos esetekben jelentős különbségek lehetnek a kétféle médiummal megvalósított mérések eredményei között. Bizonyos területeken viszont a számítógép kínál olyan lehetőségeket, amelyek papíron nem valósíthatók meg, és olyan autentikus, a valódi helyzetekhez közelebb álló feladatokat is létre lehet hozni, amelyeket papíron nem. Az itt bemutatott vizsgálatban a digitalizálás lehetőségeit és a számítógépes tesztelés fiatalkorban való alkalmazhatóságát térképezzük fel, így sem a médiahatás elemzésére, sem a számítógép által kínált innovatív itemformátumok tágabb lehetőségeinek kihasználására nem törekedtünk.

Az online kombinatív teszt elkészítéséhez felhasznált korábbi, 12 feladatot tartalmazó, papíralapú tesztben megjelenő műveleteket és a teszt szerkezetét a 15.1. táblázat mutatja. A táblázatban feltüntetett felsorolások egyben azokat az összeállításokat tüntetik fel, amelyeket a tanulóknak a papíralapú tesztek formális felsorolásaiban is használniuk kellett.

15.1. táblázat. Az online teszt kidolgozásához felhasznált teszt szerkezete (Csapó, 2001 alapján, 513. o.)

Formális feladatok sorszáma	Képi feladatok sorszáma	Feladat típusa	A konstrukciók formális felsorolása
1.	11.	Ismétléses variációk	AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB
2.	10.	Ismétlés nélküli variációk	AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED
3.	12.	Ismétlés nélküli kombinációk	ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE
4.	9.	Az összes ismétlés variáció	A, B, C, D, AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DE
5.	8.	Az összes részhalmaz	A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD
6.	7.	Descartes-féle szorzatok	A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, D3

A számítógépre való átültetéskor a formális feladatokkal kapcsolatban módosítást jelentett, hogy az eredeti tesztben szereplő ABCDE betűket a billentyűzet kiosztásnak megfelelő ASDFG karakterekre cseréltük (15.1.–15.2. ábra). Ez a módosítás könnyítést jelenthetett a gépelési nehézségekkel küzdő tanulóknak, mert csak az egymás mellett levő betűket kellett használniuk. Ugyanakkor így a formális feladatok bizonyos értelemben a manipulációt igénylő feladattípus felé mozdultak el, hiszen ezáltal a billentyűzeten sorban elhelyezett karakterekből kellett a konstrukciókat létrehozni, és elveszett az ABC betűinek természetes sorrendisége, ami megnehezíthette az összeállítások szisztematikus felsorolását. Az itt vizsgált fiatalabb életkorban ez feltehetően kevesebb gondot okozott, de idősebb, a billentyűzetet jobban ismerő és a formális gondolkodás kialakulásához közelebb álló tanulók esetében megfontolandó az ABC első betűinek használata, hasonlóan a korábbi papíralapú tesztekhez.

Bár úgy tűnik, minden más tekintetben megegyezik az online és a papíralapú teszt, további különbséget jelenthet, hogy a papíron a tanulók két dimenzióban rendezhették el a konstrukcióikat (oszlopokban és sorokban), a képernyőn csak egy egydimenziós felsorolást tudtak létrehozni. Ez a különbség is csak a formálisan gondolkodó tanulók esetében jelentkezhetett.

Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort!

Egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia, vagyis ugyanaz a betű nem szerepelhet többször a betűsorban. Felhasználható betűk: **A, S, D, F, G.**

A betűsorokat vesszővel válaszd el egymástól!

Vissza Tovább

15.1. ábra. Példafeladat az ismétlés nélküli variációra formális tartalom

Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort!

Egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia, vagyis ugyanaz a betű nem szerepelhet többször a betűsorban. Felhasználható betűk: **A, S, D, F, G.**

A betűsorokat vesszővel válaszd el egymástól!

Vissza Tovább

15.2. ábra. Példafeladat a Descartes-féle szorzatok képzésére formális tartalom

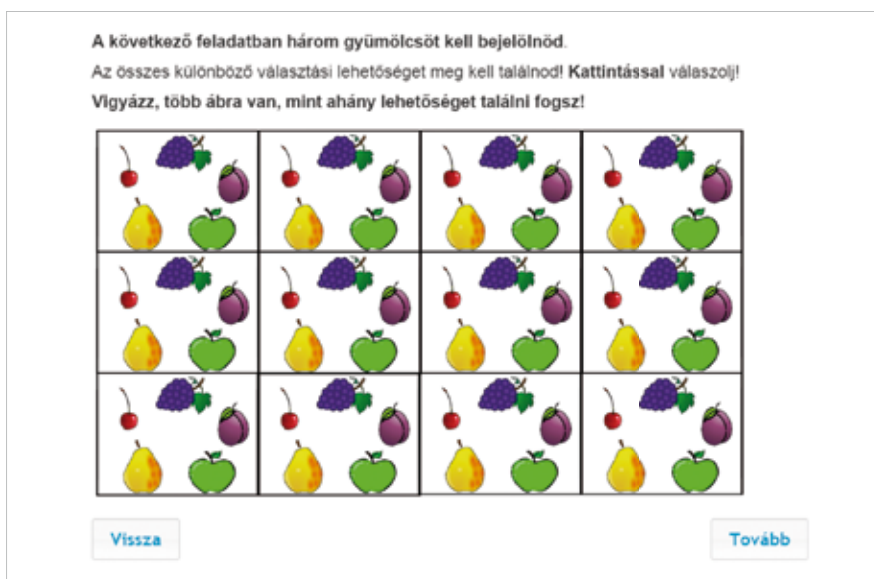
A képi feladatok esetében a papíralapú médiumon a diákoknak rajzolással (vonalak húzásával, karikázással) kellett a válaszokat megadniuk, az online felületen pedig a képek mozgatásával (vonzolással, drag and drop),

illetve kattintással lehetett létrehozni a különböző összeállításokat. A 15.3. ábra a Descartes-féle szorzatok képzéséhez tartozó online feladatot mutatja be. Ezt a feladattípust (ruhadarabokból készített összeállítások) több kutató is alkalmazta már, például *English* (1991) négyéves gyermekek vizsgálatára is alkalmasnak találta. Az eredeti, papíralapú feladatban minden egyes kis képen szerepeltek a felhasználható ruhadarabok, és a megfelelő ruhadaraboktól egy kis vonalat kellett húzni a felhasználás helyére. A számítógépes megvalósításnál csak egy helyen szerepel a felhasználható ruhakészlet, és az egerrel a helyére lehet húzni a megfelelő színű ruhadarabokat, természetesen mindegyikből bármennyit fel lehet használni. A részletgazdagabb színes képek és a mozgatás lehetősége eleve érdekesebbé teszi a feladatot, és az elkészült konstrukciókban is könnyebb az azonosságok/különbségek felismerése. Ezek az apró változtatások is autentikusabbá teszik a feladatot. Ugyanakkor a papíron megvalósított képi feladatokhoz viszonyítva itt is elmozdul a feladatmegoldás a manipulatív jelleg felé, mivel itt is objektumokat kell mozgatni.



15.3. ábra. Példafeladat a Descartes-féle szorzatok képzésére képi tartalom

A 15.4. ábra a kombinációk összeállítására mutat be egy példát az online tesztből. Itt öt különböző gyümölcsből hármat kell kiválasztani, amit összesen tízféleképpen lehet megtenni. Ezeket, illetve ezekből minél többet kell a diákoknak megtalálniuk. Papíralapon minden kis ábrán be kellett karikázni hármat, itt klikkeléssel lehet megadni a választ, megjelölni az éppen kiválasztott gyümölcsöket. A kétféle médium tevékenysége kissé itt is eltér egymástól, de a kétféle feladat még mindig viszonylag közel áll egymáshoz. Mivel itt egy már korábban jól bevált teszt digitalizálásáról van szó, nem törekedtünk a számítógép kínálta lehetőségek kihasználására. Ugyanakkor az autentikus feladatmegoldás felé lehet elmozdulni a feladat továbbfejlesztésével és alkalmazva a drag-and-drop technikát, például kosarakba lehet gyűjteni az éppen kiválasztott gyümölcsöket.



15.4. ábra. Példafeladat a kombinációk képzésére képi tartalom

A teszt legelső, kis csoportban zajló kipróbálásakor mérőbiztosok segítettek az adatfelvételt, és figyelemmel kísérték a tanulók reakciót. A terepen gyűjtött tapasztalatok azt mutatták, hogy a vizsgált korosztályban a sok szöveget és feltételt tartalmazó formális feladatok értelmezése nehézséget okozott a diákok számára, ezért jelen mérésben a formális tartalmú ismét-

lés nélküli kombinációk (12. sz. feladat) és az összes részhalmaz képzése (8. sz. feladat) itemeket nem használtuk. Emellett az instrukciók értelmezésének problémája miatt 3. évfolyamon csak a hat képi tartalmú feladattal végeztünk méréseket. A felmérésben felhasznált feladatokat a 15.2. táblázat foglalja össze.

15.2. táblázat. Az online testben használt feladatok

Évfolyam	Feladatok sorszáma
3. évfolyam	7., 8., 9., 10., 11., 12.
4. évfolyam	1., 2., 4., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 12.

A vizsgálat céljai, mintái és az adatfelvétel körülményei

Az itt bemutatott vizsgálatnak az volt a fő célja, hogy feltérképezzük, miképpen lehet egy korábban már sokszor alkalmazott, jó paraméterekkel rendelkező papíralapú kombinatív-képesség-tesztet online technológiára átültetni. Ennek érdekében kihasználtuk a technológia által kínált fontosabb előnyöket, más tekintetben viszont megőriztük az eredeti itemformátumhoz való hasonlóságot. A vizsgálat céljai konkrétan:

- (1) a teszt pszichometriai jellemzőinek vizsgálata;
- (2) az évfolyamok és nemek közötti különbségek elemzése; és
- (3) a technológiaalapú értékelés további lehetőségeinek feltárása a kombinatív gondolkodás mérésében.

Felmérésünkben hét általános iskola harmadik és negyedik osztályos tanulói vettek részt. A minta jellemzőit a 15.3. táblázat foglalja össze.

15.3. táblázat. A felmérésben részt vevő tanulók jellemzése

Évfolyam	Elemszám	Nemek aránya (gyakoriság)		Életkor* (év)	
		Fiú	Lány	Átlag	Szórás
3. osztály	186	79	104	9,12	0,41
4. osztály	219	91	126	10,17	0,42
Összesen:	405	170	230	–	–

* A 3. évfolyamon három, a 4. évfolyamon két tanuló nemre vonatkozó adata hiányzik.

A tesztfeladatok előtt a diákoknak lehetőségük volt a konstrukciók megadásához szükséges, egér- és billentyűzetkezelést igénylő műveletek gyakorlására. A formális feladatok esetében egy sematikus billentyűzet képen kiemeltük a válaszok megadásához szükséges billentyűket (A, S, D, F, G, 1, 2, 3, vessző, valamint az Enter, a Caps Lock és Backspace), majd rövid betű-, illetve számsorok begépelését kértük. A képi feladatok gyakorlásához a tesztben is megjelenő képekre kattintást, illetve azok mozgatását kértük a diákoktól. A gyakorlófeladatok addig nem engedték tovább a tanulókat a tesztfeladatokra, amíg a gyakorlatokat hibátlanul nem teljesítették. Az adatfelvétel az iskolák számítógéptermeiben, az eDia platform alkalmazásával történt.

A kombinatív feladatok megoldásakor létrejövő konstrukciókat számos módon lehet kiértékelni és a megoldásokat számszerűsíteni. Vizsgálatunkban azt a már számos felmérésben alkalmazott mutatót használtuk, amely a kiértékelés során figyelembe veszi a hibás és a felesleges konstrukciókat az összes lehetséges helyes konstrukcióhoz viszonyítva (Csapó, 1988). A mutató képlete a következő:

$$J = \frac{x(T-y)}{T^2}$$

ahol: x : a megadott helyes konstrukciók száma,
 y : a redundáns és hibás konstrukciók száma,
 T : az összes lehetséges jó konstrukció száma.

A képletet alkalmazva minden feladat esetében egy 0–1 közötti értéket kapunk, ahol az 1-es érték jelenti az összes helyes konstrukció felsorolását felesleges konstrukciók megadása nélkül. A mérésben felhasznált teszt maximális pontszáma 3. évfolyamon így 6, míg 4. évfolyamon 10 pont. A skála felbontása azonban sokkal érzékenyebb, mint 6 vagy 10 egység, hiszen a J értéke törtszám is lehet (Csapó, 2001). A papíralapú tesztváltozat esetén a mutató alkalmazása már 100 fős mintán is komoly humán erőforrást vehet igénybe, még akkor is, ha a feladatok száma kevés. A számítógép-alapú tesztváltozatba azonban egy ilyen kiértékelési mechanizmus könnyen beépíthető. A jelen felmérésben alkalmazott online kombinatív teszt a válaszokat automatikusan kiértékelte, és a tesztek megoldását követően az eredményről azonnali visszacsatolást nyújtott a tanulók számára.

A felmérés eredményei

A hat- és tízitemes tesztváltozatok reliabilitásmutatóit (Cronbach- α) összegző 15.4. táblázat értékei alapján megállapítható, hogy a feladatok mindkét évfolyamon jól mértek. Figyelembe véve az alacsony feladatszámot, ezek az értékek magasnak tekinthetők. Összehasonlításként érdemes megemlíteni, hogy a korábban említett országos reprezentatív, öt évfolyamot átfogó felmérésben a papíralapú, 12 feladatot tartalmazó teszt reliabilitásmutatója a teljes mintára ($n = 9984$) számítva $\alpha = 0,90$ volt. További részletesebb elemzésekkel megmutatható a két életkorban felvett hatfeladatos képi tesztek hasonló viselkedése (Pásztor, Csapó és Molnár, 2014; Csapó, Pásztor és Molnár, 2015).

15.4. táblázat. Az online kombinatív teszt reliabilitásmutatói

Évfolyam	Itemek száma	Cronbach- α
3. évfolyam	6	0,83
4. évfolyam	6	0,85
4. évfolyam	10	0,88

A tanulók sikeresen megoldották a próbafeladatokat, ami arra utal, hogy nem okozott számukra technikai nehézséget a számítógép használata. A hat feladatot tartalmazó tesztet a 3. osztályos tanulók átlagosan 25,7 perc alatt (szórás = 11,8 perc) oldották meg, a tízitemes teszt kitöltéséhez a 4. osztályos diákoknak átlagosan 33,2 percre (szórás = 14,2 perc) volt szükségük.

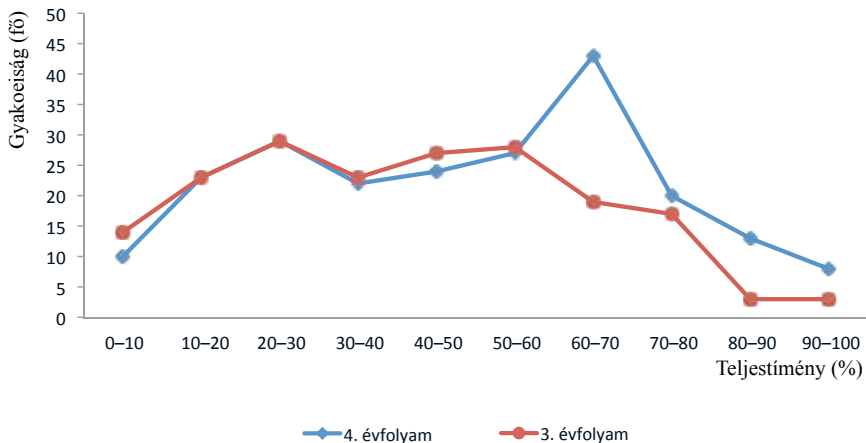
A kombinatív teszten elért átlagos eredményeket és a megfelelő szórásokat a 15.5. táblázatban foglaltuk össze. A diákok átlagosan 50% alatt teljesítettek, 3. évfolyamon szignifikánsan nehezebbnek bizonyult a feladatsor. A magas szórások a feladatok megfelelő differenciáló erejére utalnak, ugyanakkor a teljesítményekben meglévő nagy egyéni különbségeket is jelzik. A mindkét évfolyam által megoldott hat feladaton a negyedikesek szignifikánsan jobban teljesítettek (a különbség közel egyharmad szórásnyi), ami azt jelzi, hogy a teszt ebben a formában is alkalmas a fejlődés mérésére.

Az egyéni különbségek mértékét az eloszlásokat bemutató 15.5. ábra alapján tekinthetjük át. Az évfolyamon belüli jelentős különbségek mellett feltűnő, hogy a görbék nem a normál eloszlásnak megfelelő haranggörbe alakúak, sokkal inkább a bimodális eloszláshoz közelítenek. A 4. évfolyamos tanulók esetében különösen szembeötlő a görbe kiugrása a 60–70%

közötti intervallumban. Ez a bimodális jellegű eloszlás a tanulók eltérő feladatmegoldási stratégiáira utalhatnak: az alacsonyabban teljesítőkre jellemzőbb lehet a terv nélküli próbálgatás, míg a magasabb pontszámot elérőknél a konstrukciók tervszerű, szisztematikus létrehozása jelenhet meg.

15.5. táblázat. Az kombinatív teszt eredményei évfolyamonkénti bontásban (%pont)

Feladatok száma	3. osztály		4. osztály		A különbségek szignifikanciája	
	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	t	szign.
6 item	41,4	22,2	48,4	23,5	3,05	$p < 0,01$
10 item	–	–	43,2	23,5	–	–



15.5. ábra. A kombinatív teszten elért teljesítmények eloszlása a két vizsgált évfolyamon

Az adatok részletesebb elemzése azt is megmutatja, hogy melyek azok a műveletek, amelyekben a 4. évfolyamosok jelentősebb előnyre tettek szert. A 15.6. táblázat adatai szerint az eltérésekért főként három művelettípusban, az ismétléses és az ismétlés nélküli, valamint az összes ismétléses variációban megjelenő különbségek a felelősek. A 15.6. táblázatból az is leolvasható, hogy mindkét évfolyamon az ismétlés nélküli kombinációk, valamint az összes részalmaz típusú feladatok okozták a legtöbb nehézséget a tanulóknak, míg a legkevesebbet a Descartes-féle szorzatok.

15.6. táblázat. Az kombinatív teszt eredményei feladatonként és évfolyam szerinti bontásban (százalékpont)

Képi feladatok sorszáma	Feladat típusa	Évfolyam	Átlag	Szórás	A különbségek szignifikanciája	
					t	szign.
11.	Ismétléses variációk	3. évfolyam	49,7	35,4	2,0	p = 0,04
		4. évfolyam	56,7	33,3		
10.	Ismétlés nélküli variációk	3. évfolyam	41,6	31,9	2,9	p < 0,01
		4. évfolyam	51,4	35,9		
12.	Ismétlés nélküli kombinációk	3. évfolyam	30,7	28,6	1,08	n. sz.
		4. évfolyam	33,9	30,4		
9.	Az összes ismétlésvariáció	3. évfolyam	40,8	27,9	4,0	p < 0,01
		4. évfolyam	52,2	29,8		
8.	Az összes részhalmaz	3. évfolyam	26,8	28,7	1,9	n. sz.
		4. évfolyam	32,2	28,3		
7.	Descartes-féle szorzatok	3. évfolyam	58,9	29,1	1,72	n. sz.
		4. évfolyam	63,9	29,3		

Megjegyzés: n. sz.: nem szignifikáns

A képi feladatok eredményeit felhasználva szignifikáns különbséget találtunk a nemek között a lányok javára (15.7. táblázat). Az adatokat ismét közelebbről szemügyre véve azonban látható, hogy a különbségek elsősorban a 3. évfolyamon jelennek meg a nemek között, a 4. évfolyamon nincs szignifikáns különbség. További vizsgálatot igényel annak kiderítése, hogy a mikor alakul ki a lányok fejlődési előnye.

15.7. táblázat. Az kombinatív teszt eredményei nemek szerinti bontásban (százalékpont)

Évfolyam (feladatok száma)	Fiú		Lány		A különbségek szignifikanciája	
	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	t	szign.
3–4. évfolyam (6 item)	40,3	22,9	48,8	22,7	3,75	p < 0,01
3. évfolyam (6 item)	34,8	21,1	46,4	21,7	3,62	p < 0,01
4. évfolyam (10 item)	40,7	23,9	44,9	23,3	1,31	n. sz.

Megjegyzés: n. sz.: nem szignifikáns

Megvizsgáltuk a képi és a formális feladatok eredményei közötti különbségeket is, a negyedik évfolyamos mintán a különböző tartalmú részesztek eredményeit hasonlítottuk össze. Összhangban a korábbi eredményekkel, a képi tartalmú feladatokon magasabbak voltak a teljesítmények. Az átlag a formális tartalmú feladatokon 35,3% (szórás = 30,4%), a képi feladatokon pedig 48,4% (szórás 23,5%). A különbség szignifikáns: $t(218) = 7,75$ $p < 0,01$. Ebben az életkorban a képi feladatok által segített konkrétan elképzelhető szituáció hatékonyan segítette a feladatok megoldását.

Összegzés, további kutatási feladatok

A felmérés megmutatta, hogy a kombinatív képesség mérésére korábban használt papíralapú tesztek minden nehézség nélkül át lehet ültetni számítógépre, és ebben az esetben a számítógép alkalmazása további kiemelkedő előnyökkel járt. Ezek közül különös fontosságú az eredmények automatikus rögzítése és kiértékelése, a nagyszámú konstrukció számítógépre vitele ugyanis a korábbi, papíralapú tesztek esetében rendkívül költséges volt. A bevezető ellenőrző feladatokkal a tanulók néhány perc alatt elsajátították a tesztek megoldáshoz szükséges technikai készségeket, és minden nehézség nélkül használták a számítógépet. Az olyan, a számítógépes tesztelésben már alapszolgáltatásnak számító megoldásnak, mint az új itemformátumok és az azonnali visszacsatolás, a kombinatív gondolkodás felmérése során is hasznosnak bizonyultak. Az online adatfelvétel nem okozott gondot, az iskolákban rendelkezésre álló eszközök megfelelőnek bizonyultak a felmérés céljaira.

A tesztek reliabilitása a kis elemszám ellenére jónak bizonyult. Az a teszt, amelynek a digitalizálására itt sor került, eredetileg a 3–11. évfolyamok felmérésére készült. Az online felmérésben szereplő harmadik és a negyedik évfolyamok ennek az életkori intervallumnak az alsó végét jelentik, így várható volt a közepesnél gyengébb teljesítmény.

A tesztek elég érzékenynek bizonyultak a két évfolyam közötti különbség megmutatására, a fejlődés mérésére. A felmérés megmutatta a nagy egyéni fejlődésbeli különbségeket is. Ugyanakkor a fiúk és lányok között csak a fiatalabb korosztály esetében találtunk szignifikáns különbséget. Ezek természetének feltárása további vizsgálatokat igényel.

A felmérés bebizonyította, hogy az online tesztek az iskolai gyakorlatban a tanulók kombinatív gondolkodását felmérő, egyszerűen alkalmazható tesztek lehetnek. Ez a vizsgálat azonban feltárta a további lehetőségeket is, így csak egy hosszabb fejlesztési folyamat kezdeti lépésének tekintető.

A tesztek megoldása nem vett igénybe egy tanórát, így nincs akadálya annak, hogy a tesztet további feladatokkal egészítsük ki. Az adott korosztályokban a kombinatív képesség eredeti modelljében (Csapó, 1988) szereplő egyszerűbb feladatok jöhetnek szóba. Ezzel sokat lehet javítani a tesztek reliabilitásán. Elszakadva a papíralapú tesztől, és kihasználva a számítógép további lehetőségeit, más jellegű, a fiatalabb gyermekek világához közelebb álló, autentikus feladatokat lehet készíteni. Amint a korábbi kutatás megmutatta (English, 1991 és Poddiakov, 2011), a tesztelést ki lehet terjeszteni az iskola előtti korosztályokra is. Itt hasznos segítség lehet az, hogy a számítógépes feladatok hangutasításokat is tartalmazhatnak.

A korábbi papíralapú fejlődésvizsgálatok egyetlen teszttel mérték fel a fejlődést egy kilenc évfolyamot átfogó életkori intervallumban (Csapó, 2001). Ez szükségszerűen azzal járt, hogy a teszt nem lehetett mindegyik életkor számára optimális. A kombinatív tesztek továbbfejlesztésében több lehetőség is adódik a probléma megoldására. Lehet készíteni a különböző évfolyamok számára egymással összehorgonyzott, különböző nehézségű tesztváltozatokat. Ez a lehetőség papíralapon is alkalmazható, hátránya, hogy nem jelent megoldást az azonos életkoron belüli nagy egyéni különbségekre. Lehet alkalmazni a multistage technikát, melynek során a tanulók először egy átlagos nehézségű tesztet kapnak, majd annak eredménytől függően egy könnyebbet vagy nehezebbet. Végül, ha elegendő számú feladat áll rendelkezésre egy feladatbankban, az adaptív tesztelés technológiájához lehet folyamodni.

További érdekes lehetőségeket nyújt a számítógép a kombinatív gondolkodás vizsgálatára a tevékenységek logolásával és a logfájlok elemzésével. A rutinszerűen alkalmazott megoldások (idő, billentyű, kurzormozgás) mellett esetünkben a konstrukciók felsorolásának sorrendje, a próbálkozások újragondolásának vizsgálata segíthet a tanulók kombinatív gondolkodásának feltérképezésében.

Végül érdemes megemlíteni, hogy ha széles körben rendelkezésre áll a kombinatív képesség fejlődésének mérésére szolgáló teszt, az új utakat nyit a fejlesztő kísérletek számára. Egyszerűen fel lehet mérni a kombinatív gondolkodás fejlettségét kísérlet előtt és után, akár olyan kísérletekben,

amelyek közvetlenül a kombinatív gondolkodás fejlesztését célozzák meg, akár olyanokban, amelyeknél a kísérleti beavatkozásnak a kombinativitásra gyakorolt transzferhatása a kérdés.

Irodalom

- Adey, Philip és Csapó Benő (2012): A tudományos gondolkodás fejlesztése és értékelése. In: Csapó Benő és Szabó Gábor (szerk.): *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.
- Csapó Benő (1979): A kombinatív képesség és értékelésének feltételei. *Acta Univ. Szeg. de A. J. nom. Sectio Paed. et Psych. Ser. Spec. Paed.*, Szeged.
- Csapó Benő (1983): A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálata 14 éves tanulóknál. *Magyar Pedagógia*, **83**. 1. sz. 31–50.
- Csapó Benő (1985): A struktúra és a tartalom szerepének vizsgálata izomorf kombinatorikai feladatokban. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 1. sz. 19–34.
- Csapó, B. (1987a): Representing the qualitative characteristics of reasoning by qualitative data. Two examples from the field of the operational abilities: combinatoric and logical operations. *Bremer Beiträge zur Psychologie*, 67. sz. 1–20.
- Csapó Benő (1987b): A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában. *Pedagógiai Szemle*, 9. sz. 844–853.
- Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó, B. (1990): Integrating the development of the operational abilities of thinking and the transmission of knowledge. In: Mandl, H., De Corte, E., Bennett, N. és Friedrich, H. F. (szerk.): *Learning and instruction. European research in an international context*. Volume 2.2. Analysis of complex skills and complex knowledge domains. Pergamon Press, Oxford. 85–94.
- Csapó, B. (1992): Improving Operational Abilities in children. In: Demetriou, A., Shayer, M. és Efklides, A. (szerk.): *Neo-Piagetian theories of cognitive development. Implications and applications for education*. Routledge and Kegan, London. 144–159.
- Csapó Benő (2001): A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, **101**. 4. sz. 511–530.
- Csapó, B., Ainley, J., Bennett, R., Latour, T. és Law, N. (2012): Technological issues of computer-based assessment of 21st-century skills. In: McGaw, B., Griffin, P. és Care E. (szerk.): *Assessment and Teaching of 21st-century Skills*. Springer, New York. 143–230.
- Csapó, B., Pásztor, A. és Molnár, Gy. (2015): *Online assessment of combinatorial reasoning: Perspectives of measuring a challenging construct*. Paper present-

- ed in the 16th Biennial EARLI Conference, Limassol, Cyprus, August 25–29, 2015.
- Dienes Zoltán (1973): *Építsük fel a matematikát*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- DeTemple, D. és Webb, W. (2014): *Combinatorial reasoning. An introduction to the art of counting*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Fishbein, E. és Grosman, A. (1997): Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, **34**. 27–47.
- Hajdúné Holló Katalin (2004): Az elemi kombinatív képesség fejlődésének kritériumorientált diagnosztikus feltárása 4–8 évesek körében. *Magyar Pedagógia*, **104**. 3. sz. 263–292.
- Inhelder, B. és Piaget, J. (1967): *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- English, L. D. (1991): Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, **22**. 5. sz. 451–474.
- English, L. D. (1993): Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 255–273.
- Kishta, M. A. (1979): Proportional and combinatorial reasoning in two cultures. *Journal of Research in Science Teaching*, **16**. 5. sz. 439–443.
- Lockwood, E. (2013): A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, **32**. 2. sz. 251–265.
- Maher, C. A., Powell, A. B. és Uptegrove, E. B. (szerk., 2011): *Combinatorics and reasoning. Representing, justifying and building isomorphisms*. Springer, New York.
- Nagy József (2004): Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, **14**. 8. sz. 3–20.
- Pásztor, A., Csapó, B. és Molnár, Gy. (2014): Computer-based diagnostic assessment of thinking skills – the case of combinatorial reasoning. EARLI SIG 1 Conference, Madrid, Spain, 42–43.
- Piaget, J. (1970): *Válogatott tanulmányok*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- Poddiakov, N. (2011): Searching, experimenting and the heuristic structure of a preschool child's experience. *International Journal of Early Years Education*, **19**. 1. sz. 55–63.
- Schröder, E., Bödeker, K., Edelstein, W. és Teo, T. (2000): *Proportional, combinatorial, and correlational reasoning. A manual including measurement procedures and descriptive analyses*. Study „Individual Development and Social Structure”. Data Handbooks Part 4. Max Planck Institute for Human Development, Berlin.
- Simonton, D. K. (2010): Creative thought as blind-variation and selective-retention: Combinatorial models of exceptional creativity. *Physics of life reviews*, **7**. 2. sz. 156–179.

Zombori, B. (1992): Visualität und Variationen: Zeichenaufgaben zur Förderung kombinatorischer Fähigkeiten. In: Bak, I., Kárpáti, A., Scholz, O., Volger, A. (szerk.): *Ästhetische Erziehung in Ungarn*. Hochschule der Künste, Berlin.